

文章编号: 1000-8055(2010)01-0193-05

Kriging 模型在固体火箭发动机装药可靠性分析中的应用

刘纪涛¹, 刘 飞², 张为华¹

(1. 国防科技大学 航天与材料工程学院, 长沙 410073;

2. 中国人民解放军 96630 部队, 北京 102206)

摘 要: 基于 Kriging 方法对固体火箭发动机装药结构可靠性进行了分析. 首先, 采用拉丁超立方抽样技术得到了随机参数样本点; 然后, 利用样本点数据对黏弹性有限元模型的装药进行了结构力学分析; 最后, 通过 Kriging 模型得到了八面体剪应变的函数近似响应面, 并结合失效判据对失效函数进行了可靠性计算. 为了验证 Kriging 模型在可靠性计算中的有效性, 其计算结果与 Monte-Carlo 方法进行了比较, 得到了十分接近的可靠度.

关 键 词: Kriging 方法; 可靠性分析; 固体火箭发动机; 黏弹性

中图分类号: TB114.3

文献标识码: A

Application of Kriging model to reliability analysis of solid rocket motor grain

LIU Ji-tao¹, LIU Fei², ZHANG Wei-hua¹

(1. College of Aerospace and Materials Engineering,

National University of Defense Technology, Changsha 410073, China;

2. Troops of 96630, The Chinese People's Liberation Army, Beijing 102206, China)

Abstract: The structure reliability of solid rocket motor grain was analyzed based on Kriging method. Firstly, Lating hypercube sampling was used to get sampling data of random variables. Secondly, the grain structure was analyzed using finite element method with sampling data. At last, a response surface of octahedron shear stress was estimated using Kriging model. And, the reliability of grain was estimated in combination with failure criterion. To evaluate the applicability of the Kriging method, Monte Carlo simulation was employed to compare with it. The approximate results of reliability qualify the performance of the method.

Key words: Kriging method; reliability analysis; solid rocket motor; viscoelasticity

在过去几十年中结构可靠性得到了快速发展. 矩法、响应面法 (RSM)^[1-2]、随机有限元方法纷纷引入, 并在可靠性计算方法中占据重要地位. 随着有限元技术的推广, 隐式函数的可靠性计算日益受到人们的重视, 不少用于结构设计的拟合

方法纷纷引入. 如: 响应面法、神经网络拟合法和 Kriging 模型.

Kriging 模型作为线性回归的改进技术, 包含了线性回归部分和被视作随机分布实现的非参数部分. 不少学者都进行了有益的研究^[3-4], 认为

收稿日期: 2008-12-22; 修订日期: 2009-06-10

基金项目: 国家 863 高科技项目

作者简介: 刘纪涛 (1981 -), 男, 山东莘县人, 博士生, 研究方向为可靠性设计、仿真及可靠性评估.

相比传统的插值技术, Kriging 模型有很多优点。如, Kriging 模型同时具有局部和全局的统计特性, 以此可以分析信息的趋势、动态等。

本文基于 Kriging 模型联合拉丁超立方抽样技术讨论在固体火箭发动机装药结构可靠性中的应用。

1 Kriging 模型

1.1 Kriging 方法基本理论

Kriging 模型一般包含两部分: 多项式和随机分布。其形式如下:

$$y(x) = \sum_{j=1}^q \beta_j f_j(x) + z(x) = F\beta + z \quad (1)$$

其中 $\sum_{j=1}^q \beta_j f_j(x)$ 相当于响应面函数, $f_j(x)$ 为一组已知的基函数, β_j 为待估系数; $z(x)$ 一般取均值 $E[z(x)] = 0$ 为零时的平稳随机过程, 方差为

$$\text{Cov}[z(x_i), z(x_j)] = \sigma^2 R[R(x_i, x_j)], \quad i, j \in [1, n]$$

$R(x_i, x_j)$ 为两个样本点的相关函数, 通常采用半变差函数表述。其中 n 为样本点个数。

对于待估点 x_0 通常采用权系数

$$C = \{c_1, c_2, \dots, c_n\}$$

利用线性组合的形式描述

$$\hat{y}(x_0) = \sum_{i=1}^n c_i y(x_i) = C^T Y$$

因此, 问题转化成为使 $\hat{y}(x_0)$ 的误差均方差最小

$$\begin{aligned} \sigma^2(x_0) &= E\{|\hat{y}(x_0) - y(x_0)|^2\} = \\ &= E\{(C^T Z - z)^2\} = \\ &= \sigma^2(1 + C^T RC - 2C^T r) \end{aligned}$$

其中 $r = [R(x_1, x_0), \dots, R(x_n, x_0)]$ 。

引入 Lagrange 算子 λ , Lagrange 方程描述为

$$\phi(C, \lambda) = \sigma^2(1 + C^T RC - 2C^T r) - \lambda(F^T C - f)$$

通过引入极值条件 $\delta\phi = 0$ 可以得到

$$\begin{bmatrix} 0 & F \\ F & \sigma^2 R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\lambda \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f \\ \sigma^2 r \end{bmatrix} \quad (2)$$

于是最优线性无偏预测

$$\begin{aligned} \hat{y}(x) &= f^T \beta + r^T R^{-1} (y - F\beta) \\ \beta &= (F^T R^{-1} F)^{-1} F^T R^{-1} y \end{aligned} \quad (3)$$

通过式(2)推出模型预测的均方误差估计

$$\begin{aligned} E_{\text{ms}}[\hat{y}(x)] &\equiv \sigma^2(x) = \\ &= \sigma^2 \left(1 - \begin{bmatrix} f \\ r \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} 0 & F \\ F & R \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} f \\ r \end{bmatrix} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

参数 σ^2 可以通过极大似然估计求得, 对于高斯 Kriging 模型

$$\sigma^2 = \frac{1}{n} (y - F\beta)^T R^{-1} (y - F\beta) \quad (5)$$

1.2 半变差函数模型

半变差函数在概率论中用于描述样本的散布, 在 Kriging 模型中通过使用待估点的方差使估计误差最小。

半变差函数的形式很多, 如指数模型、高斯模型等。其中常用的相关函数为

$$\begin{aligned} R(x_i, x_j) &= R(d_k, \theta_k) = \\ &= \exp\left[-\sum_{k=1}^p \theta_k |x_i^k - x_j^k|^{a_k}\right] \\ 0 &< a_k \leq 2 \end{aligned}$$

其中 d_k 为距离函数, 在此 $d_k = |x_i^k - x_j^k|$; p 为样本点的维数。

很多研究表明 $a_k = 2$ 的平顺性很好, 而且精度也较高。

参数 $\theta = [\theta_1, \dots, \theta_p]$ 的极大似然估计可以联合公式(3)与公式(5)通过迭代方法求解。

在结构优化设计和可靠性计算中, Kriging 模型不会单独使用, 通常配以抽样技术联合使用。经常被使用且效果比较好的应属拉丁超立方抽样方法。

2 拉丁超立方抽样

拉丁超立方抽样(LHS)最早由 McKay 提出, 由 Stein 给出比较数学化的表述。LHS 被认为是一种可以替代 Monte-Carlo 方法且效果较好的方差缩减技术, 在仿真模拟、优化计算和可靠性计算方面得到较为广泛的应用^[5]。

设参数 $x = (X_1, \dots, X_p)$ 对应的概率分布函数(CDF)为 $F(x)$

$$F(x) = \prod_{k=1}^p F_k(x_k) \quad (6)$$

其中 $F_k(x)$ 是 X_k 的 CDF。则对于 n 个拉丁超立方抽样产生步骤如下:

步骤1 产生一个 $n \times p$ 的矩阵 $P = (p_{jk})$, $j = 1, \dots, n, k = 1, \dots, p$, 它的列相互独立, 每列为 $\{1, 2, \dots, n\}$ 的一个随机置换;

步骤2 产生 $n \times p$ 矩阵 $U = (u_{jk})$, 所有的 u_{jk} 独立同分布于 $U(0, 1)$, 并独立于 P ;

步骤3 令:

$$x_{jk} = F_k^{-1} [n^{-1} (p_{jk} - 1 + u_{jk})]$$
$$x_j = (x_{j1} , \cdots , x_{jp}) \text{ 即为一次 LHS 抽样.}$$

3 发动机装药可靠性

3.1 黏弹性本构关系

固体推进剂是含有大量固体颗粒的高分子聚合物,具有黏弹性和近似不可压缩性,通常情况下其泊松比介于 0.49 和 0.5 之间.基于 Herrmann 变分原理出发得到的不可压和近似不可压黏弹性材料的积分型本构关系能够较好的满足固体推进剂结构力学分析.

3.2 固体药柱模型参数

固体火箭发动机采用高强度合金结构钢壳体和星孔装药形式.星孔装药参数如表 1 所示^[6].壳体弹性模量为 1.96×10^5 Pa,泊松比为 0.29.

发动机长径比较大,分析时按照平面应变处理.包覆层和推进剂材料都属于黏弹性材料.包覆层泊松比为 0.495.

推进剂剪切松弛模量的 Prony 级数为

$$G(t) = 2.3537 + 1.2276e^{-\frac{t}{30430.7}} +$$
$$1.9963e^{-\frac{t}{3013.07}} + 2.9778e^{-\frac{t}{301.307}} +$$
$$1.0729e^{-\frac{t}{30.1307}} + 1.3923e^{-\frac{t}{3.01307}}$$

包覆层剪切松弛模量的 Prony 级数为

$$G(t) = 5.6526 + 2.7368e^{-\frac{t}{30430.7}} +$$
$$4.75402e^{-\frac{t}{3013.07}} + 6.9573e^{-\frac{t}{301.307}} +$$
$$2.7923e^{-\frac{t}{30.1307}} + 3.7356e^{-\frac{t}{3.01307}}$$

表 1 药柱结构尺寸

Table 1 Dimensions of motor structure

序号	名称	尺寸	序号	名称	尺寸
1	药柱外径/mm	284.5	7	星角圆弧 r_1 /mm	7.5
2	长度/mm	184.3	8	过渡圆弧 r /mm	6
3	内径/mm	124	9	燃烧室外径/mm	292.7
4	星角数	5	10	燃烧室内径/mm	287.5
5	角分数	0.8	11	包覆层厚度/mm	1.5
6	星根半角/(°)	35			

3.3 药柱失效准则

对于无缺陷发动机装药,在温度和内压载荷作用下,一般采用八面体剪应变准则,尤其对于多项应力状态八面体剪应变和八面体剪应力作为破坏准则比较合理^[7].

八面体剪应变的表达式为

$$\gamma_8 = \frac{2}{3} [(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_1 - \varepsilon_3)^2]^{\frac{1}{2}} =$$
$$\frac{2}{3} [(\varepsilon_{11} - \varepsilon_{22})^2 + (\varepsilon_{22} - \varepsilon_{33})^2 + (\varepsilon_{11} - \varepsilon_{33})^2 +$$
$$\frac{3}{2} (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{23}^2 + \varepsilon_{31}^2)]^{\frac{1}{2}} \quad (7)$$

式中 $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ 为主应变.
装药极限状态方程(失效函数)定义为

$$M = \gamma_{8m} - \gamma_8 \quad (8)$$

式中 γ_{8m} 为八面体剪应变极值.

则系统可靠度为

$$R_s = F(M \geq 0) = 1 - F(M < 0) \quad (9)$$

模型中的随机变量为:推进剂泊松比 μ ,发动机最大压强 p_0 和八面体剪应变极值 γ_{8m} .统计特征如表 2 所示.发动机压力 p (MPa) 随时间 t (s) 变化曲线按下式计算

$$p = \begin{cases} p_0 t / 0.08 & 0 \leq t \leq 0.08 \\ p_0 & t > 0.08 \end{cases}$$

表 2 随机变量统计特征

Table 2 Statistics of random variables

变量	均值	方差	分布
泊松比 μ	0.495	0.001	正态
最大压强 p_0 /MPa	18.5	1.85	正态
γ_{8m}	0.3	0.03	正态

3.4 有限元模型

在此,发动机装药力学分析统一采用非线性有限元软件 MSC. MARC 计算.单元类型为二次缩减积分与 Herrmann 混合平面应变单元.

鉴于最大剪应变位置通常发生在装药内表面,因此,这里只考虑星型装药内表面节点应变情况.并按照对称性,选择模型的 1/10 进行计算.图 1 和图 2 分别显示了各变量为均值时装药部分等效应力分布和内表面节点主剪应变情况(按大小绘制曲线).通过公式计算八面体剪应变,并求出最大值代入公式,便可得出本次可靠性状态.

3.5 可靠性分析及结果

作为比较,分别选取 $n = 200, 300, 400$ 三组 LHS 数据.

Kriging 模型中的多项式部分选用以下二次多项式形式:

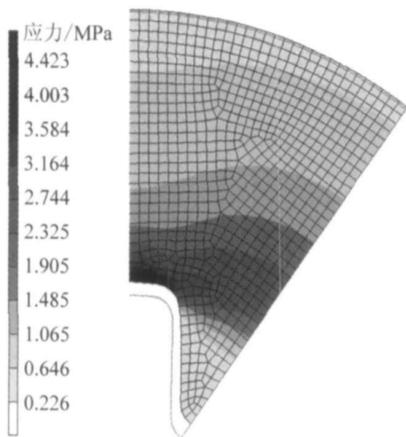


图 1 等效应力分布
Fig. 1 Equivalent stress distribution

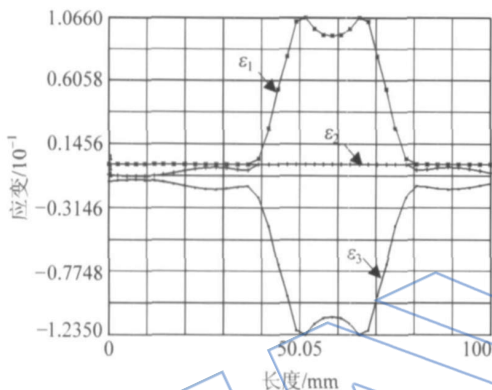


图 2 内表面节点主剪应变
Fig. 2 Principal shear strain of internal surface nodes

$$F\beta = \beta_0 + \sum_j^m \beta_j x_j + \sum_j^m \beta_{+m} x_j^2 + \sum_j^m \sum_{i=1}^{j-1} \beta_{ij} x_i x_j$$

计算过程大体分为三个部分:应用拉丁超立方抽样进行有限元仿真、应用仿真数据和抽样数据计算 Kriging 模型和依据失效函数计算系统可靠度. 具体计算流程如图 3 所示.

计算结果如表 3 所示. 图中显示了样本点为 400 时八面体剪应变的 Kriging 拟合模型和样本点数据. 为了避免样本不同量级产生的误差,对样本数据进行了标准化处理. 图中显示的即为处理后的结果.

Monte-Carlo 方法可以得到问题精确解,用于验证其他方法. 但直接的在有限元仿真中应用 Monte-Carlo 方法计算成本相当高,几乎与样本数量成正比.

在此给出了 100 000 次(为了保证可靠度的精确度,一定数量的仿真次数应该得到保证)的 Monte-Carlo 有限元计算结果,如表 3 所示. 可以看到可靠性计算结果十分相近. 但 Monte-Carlo

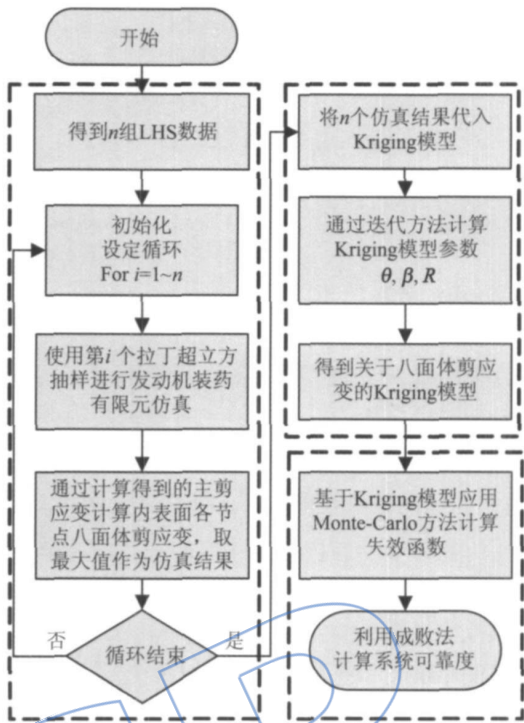


图 3 可靠性分析计算流程
Fig. 3 Calculation flowchart of reliability analysis

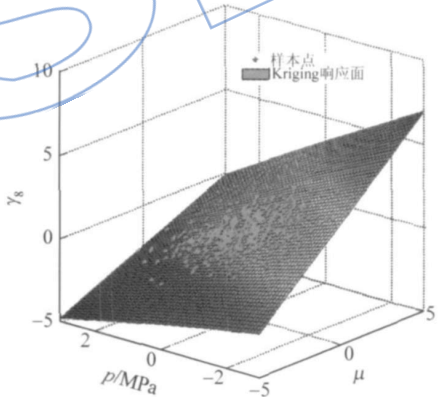


图 4 八面体剪应变响应面
Fig. 4 Response surface of octahedron shear stress

(M-C)方法计算耗时却是其他计算量的几百倍. 相比有限元计算,后两部分的计算,即 Kriging 模型求解及计算系统可靠度的计算成本并不高.

表 3 可靠性计算结果比较				
Table 3 Comparison of the reliability result				
	样本数	均值 μ_m	均方差 μ_m	可靠度
L HS	200	0.1309	0.0385	0.99938
L HS	300	0.1311	0.0403	0.99936
L HS	400	0.1311	0.0363	0.99944
M-C	100 000	0.130989	0.039475	0.999470

4 结 论

- 1) 采用 Kriging 模型对黏弹性有限元模型的发动机装药结构可靠性进行分析,得到了与 Monte-Carlo 法几乎相近的可靠度.
- 2) Kriging 模型对样本点数量要求不高,远远小于 Monte-Carlo 方法要求的随机变量数,而且有比较高的精度,因此对于复杂失效函数尤其是隐式方程的可靠性分析具有很好的应用前景.

参考文献 :

[1] Cheng J , Li Q S , Xiao R. A new artificial neural network-based response surface method for structural reliability analysis[J]. Probabilistic Engineering Mechanics , 2008 , 23(1) : 51-63.

[2] Gaytona N , Bourinet J M , Lemaire M. CQ2RS: a new statistical approach to the response surface method for reliability analysis[J]. Structural Safety , 2003 ,25 (1) :99-121.

[3] Sakata S , Ashida F , Zako M. On applying Kriging-based approximate optimization[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 2007 ,196 :2055-2069.

[4] Sakata S , Ashida F , Zako M. An efficient algorithm for Kriging approximation and optimization with large-scale sampling data[J]. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , 2004 , 193 :385-404.

[5] 方开泰 ,王元. 数论方法在统计中的应用[M]. 北京 : 科学出版社 , 1996.

[6] 颜彬. 固体火箭发动机复合推进剂装药结构完整性分析[D]. 南京 :南京理工大学 , 2007.

[7] 张书俊. 固体火箭发动机粘弹性药柱结构可靠性分析[J]. 固体火箭技术 , 2006 , 29(3) :183-185.

[8] ZHANG Shujun. Analysis on structure of solid rocket motor viscoelastic grains [J]. Journal of Solid Rocket Technology ,2006 , 29(3) :183-185. (in Chinese)